Systèmes dynamiques avec perturbation aléatoire à queues lourdes

Dimitri Petritis

Institut de recherche mathématique de Rennes
Université de Rennes 1 et CNRS (UMR 6625)

Toulouse, mai 2015

Systèmes dynamiques

Plusieurs phénomènes en physique, chimie, biologie, économie, écologie, . . . , modélisés par **systèmes dynamiques**.

- **Espace mesurable** $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ (espace standard de Borel).
- **Transformation mesurable** $t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$.

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_{n+1} &= t(X_n), n \geq 0. \end{aligned}$$

Cas particulier de chaîne de Markov : déterministe

$$P(x, B) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in B | X_n = x) = \varepsilon_{t(x)}(B) = \mathbb{1}_{t^{-1}(B)}(x).$$

Notions usuelles : existence et unicité de la mesure invariante ($\pi = \pi P$), temps de passage, etc.

Exemples

qui illustrent comportement qualitatif

Exemple (Application logistique)

$\mathbb{X} = [0,1]$, $t(x) = ax(1-x)$, avec $a \in [0,4]$.

$$\mathrm{Fix}(t) := \{x \in \mathbb{X} : t(x) = x\}.$$

- Si $a < 1$ alors $\mathrm{Fix}(t) = \{0\}$ (stable). Mesure invariante $\pi = \varepsilon_0$.
- Si $1 < a < 2$ alors $\mathrm{Fix}(t) = \{0, \frac{a-1}{a}\}$ (instable, stable). Invariant measure $\pi = \varepsilon_{\frac{a-1}{a}}$.
- Si $2 < a < 4$ alors $\mathrm{Fix}(t) = \{0, \frac{a-1}{a}\}$ (instable, instable). Comportement très complexe : cycles, cascades de bifurcation, etc.
- Si $a = 4$ alors $\mathrm{Fix}(t) = \{0, \frac{a-1}{a}\}$ (instable, instable). Comportement chaotique. Mesure invariante $\pi(dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx$.

Autres exemples : $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$ avec $t_1(x) = axe^{-bx}$ ou $t_2(x) = \frac{ax}{(1+x)^b}$, or ....

Pourquoi modèles précédents typiques ?

Car transformation **non-linéaire** t

- approximativement linéaire pour petit x (correspond à croissance exponentielle),
- sous-linéaire pour grand x (dû à compétition en écologie, chute des rendements en économie, etc).
- **Transformations admissibles :**

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \{t : \mathbb{X} \to \mathbb{X} \text{ avec « bonnes » propriétés}\} \\ &= \{\text{paramètres de transformation } \in \text{ « bon » ensemble}\}.\end{aligned}$$

- **Faits :**
  - Environnement (Nature) fixe paramètres de t.
  - Comportement du système très sensible aux valeurs des paramètres.

Comment obtenir de résultats sensés de stabilité ...

... d'une extreme sensibilité aux paramètres ?

- Introduire aléa aux paramètres et chercher comportement presque sûr par rapport à l'environnement.
- Au lieu de $t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ fixée, introduire suite i.i.d. (T_n) d'**applications aléatoires** $T_n : \Omega \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ s.t. $T_n(\omega, \cdot) \in \mathcal{T}$.
- Définir récursivement $X_0 = x_0$ et $X_{n+1} = T_{n+1}(X_n)$.
- Si T_n (ou ses paramètres) distribuées selon loi ν, suite (X_n) chaîne de Markov non-déterministe avec noyau markovien

$$P(x, B) = \nu(\Omega_x(B)),$$

où $\Omega_x(B) = \{\omega \in \Omega : (\omega, x) \in T^{-1}(B)\}$ et $T \sim \nu$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Précisions sur $\mathcal{T}$

Définition (Conditions d'admissibilité)

$\mathbb{X} = [0,1]$ ou $\mathbb{R}_+$. Une transformation $t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ **admissible** si

1. t continue.
2. $t(0) = 0$.
3. $\lim_{x\downarrow 0} \frac{t(x)}{x} = a$, avec $0 < a < \infty$.
4. $t(x) = axr(x)$ avec $0 < r(x) < 1$ pour $x \in \mathbb{X}$.

- $t \in \mathcal{T}$ en relation avec (a, r).
- Si (T_n) suite i.i.d. d'applications admissibles, elle sera en relation avec suite i.i.d. (A_n, R_n), vérifiant

$$0 < A_n < \infty \text{ p.s. et } 0 < R_n(\cdot, x) < 1 \text{ p.s. pour tout } x \in \mathbb{X}.$$

Résultats antérieurs

Supposons que suite (T_n) admissible $(T_n(\omega, x) = A_n(\omega) x R_n(\omega, x))$.

Théorème (Athreya 2004)

Notons $\rho(x) = -\mathbb{E} \ln R_n(x)$. Si

1. $\rho(x) < \infty$,
2. $\lim_{x \downarrow 0} \rho(x) = 0$,
3. *pour grand x, la fonction ρ croissante,*
4. $\mathbb{E} |\ln A_1| < \infty$,
5. *quelques conditions techniques additionnelles sur l'image des T_n vérifées,*

alors, $\exists ! \pi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ invariante.

Théorème (Athreya 2004)

Sous les mêmes conditions et $\mathbb{E} \ln A_1 \leq 0$, la probabilité invariante $\pi = \varepsilon_0$.

Quelle méthode pour montrer ces résultats ?

Méthode de Lyapunov (1892) et Foster (1952).
Méthode popularisée dans Meyn-Tweedie (1993).

Théorème (Meyn-Tweedie 1993, thm 13.0.1)

Notons $D = P - I$ le laplacien discret sur graphe de P. Équivalence entre

1. *Il existe probabilité invariante.*
2. *Il existe « petit » ensemble $B \in \mathcal{X}$ et constante $K_B < \infty$ tels que $\mathbb{E}_x \tau_B < K_B$ pour tout $x \in \mathbb{X}$.*
3. *Il existe (V, B, α, K) avec $V : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$, $B \in \mathcal{X}$ et $0 < \alpha, K < \infty$ t.q.*
   - $DV(x) \leq -\alpha$ *sur* B^c
   - $PV(x) \leq K$ *sur* $\mathbb{X}$.

$$DV(x) = \mathbb{E}(V(X_{n+1}) - V(X_n) | X_n = x).$$

V transforme chaîne (X_n) en surmartingale stricte $(V(X_n))$ sur B^c.

- Belitsky-Menshikov-P-Vachkovskaia (2015).
  Menshikov-P-Wade (en préparation).
- Élargir conditions d'admissibilité pour traiter cas

$$\lim_{x \to 0} R_n(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \infty.$$

- Montrer que critère Lyapunov et Foster peut être affiné
  Aspandiiarov-Iasnogorodski-Menshikov (1996)
  Menshikov-P (2014)
  pour couvrir des cas au delà d'Athreya.

En échelle logarithmique

- En passant en échelle logarithmique :

$$X_{n+1} = A_{n+1} X_n R_n(X_n) \Rightarrow \xi_{n+1} = \alpha_{n+1} + \xi_n + \ln R_n(\exp(\xi_n)),$$

  où $\xi_{n+1} = \ln X_{n+1}$ et $\alpha_{n+1} = \ln A_{n+1}$.
- Si on choisit $R_n(\exp(\zeta)) = \exp(\pm|\zeta|^\gamma)$, avec $0 < \gamma < 1$,
- le système dynamique devient :

$$\xi_{n+1} = \xi_n \pm |\xi_n|^\gamma + \alpha_{n+1}.$$

Remarque

La condition $0 < R_n(x) < 1$ n'est plus satisfaite.

Hypothèses globales

- $(\alpha_n)_n$ v.a.r.i.i.d. de loi $\mu \ll \lambda$, où λ mesure de réference (Lebesque ou dénombrement).
- $m = \frac{d\mu}{d\lambda}$ **à queue(s) lourde(s)** (donc α_1 non intégrable).

Remarque

La condition $\mathbb{E}|\alpha_1| = \mathbb{E}|\ln A_1| < \infty$ n'est plus satisfaite.

But : trouver conditions pour que $\mathbb{P}(\tau_B < \infty) = 1$ et dans ce cas déterminer quels moments $\mathbb{E}\tau_B^q < \infty$.

Théorème 1 : $\xi_{n+1} = (\xi_n - \xi_n^\gamma + \alpha_{n+1})_+$, avec $0 < \gamma < 1$

Théorème

Sous hypothèses : $\mu([0,1]) > 0$ *et* $m(y) \sim \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) c_y / y^{1+\theta}$ *avec* $0 < \theta < 1$ *et* y *grand :*

1. $B = [0, b]$ *accessible pour* $b > 1$.
2. *Si* $0 < b_1 \leq c_y \leq b_2 < \infty$ *pour* y *grand, alors*
   - $\theta > 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_B < \infty) = 1$ *et*
   $$\mathbb{E}(\tau_B^q) \begin{cases} < \infty & \text{si } q < \frac{\theta}{1-\gamma} \\ = \infty & \text{si } q > \frac{\theta}{1-\gamma}, \end{cases}$$ $\Rightarrow$ *probabilité invariante existe,*
   - $\theta < 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_B < \infty) < 1$,
3. *Si* $\lim c_y = c$ *et* $\theta = 1 - \gamma$, *alors*
   - $c\pi \csc(\pi\theta) < \theta \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_B < \infty) = 1$ *et* $\exists! \delta_0 = \delta_0(\theta) < \theta$, *t.q.*
   $$\mathbb{E}(\tau_B^q) \begin{cases} < \infty & \text{si } q < \frac{\delta_0}{1-\gamma} \\ = \infty & \text{si } q > \frac{\delta_0}{1-\gamma}, \end{cases}$$

Théorème 2 : $\xi_{n+1} = (\xi_n + \xi_n^\gamma - \alpha_{n+1})_+$, avec $0 < \gamma < 1$

Théorème

Si $\mu([0,1]) > 0$, $m(y) \sim \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) c_y / y^{1+\theta}$ *avec* $0 < \theta < 1$ *pour* y *grand et* $\lim c_y = c$, *alors* $B = \{0\}$ *accessible.*
En outre,

1. $\theta < 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$ *et*
   $\forall q > 0, \mathbb{E}(\tau_0^q) < \infty$ $\Rightarrow$ *probabilité invariante existe.*
2. $\theta = 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$ *et* $\exists! \delta_0 = \delta_0(\theta) < \theta$, *t.q.*

$$\mathbb{E}(\tau_B^q) \begin{cases} < \infty & \textit{si } q < \frac{\delta_0}{\theta} \\ = \infty & \textit{si } q > \frac{\delta_0}{\theta}. \end{cases}$$

3. $\theta > 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_B < \infty) < 1$.

Remarque

Condition $\lim c_y = c$ nécessaire uniquement pour cas critique $\theta = 1 - \gamma$.

Théorème 3 : $\xi_{n+1} = (\xi_n - \xi_n^\gamma + \alpha_{n+1})_+$, avec $0 < \gamma < 1$

Théorème

Supposons $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R}$ *(accroissements bilatères) et* $B = [0, b]$ *avec* $b > 1$. *Alors B est accessible. En outre,*

1. *Si* $\mathbb{P}(\alpha_1 > y) \leq \frac{c}{y^\theta}$ *et* $\theta > 1 - \gamma$ *alors* $\mathbb{E}_x(\tau_B^q) < \infty, \forall q < \frac{\theta}{1-\gamma}$ $\Rightarrow$ *probabilité invariante existe.*
2. *Supposons* $\mathbb{P}(\alpha_1 > y) \geq \frac{c_d}{y^{\theta_d}}$ *et* $\mathbb{P}(\alpha_1 < -y) \geq \frac{c_g}{y^{\theta_g}}$, *avec* $0 < \theta_d < \theta_g < 1$ *(queue droite plus lourde que la gauche).*

$$\theta_d < 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_B < \infty) < 1.$$

Théorème 4 : $\xi_{n+1} = (\xi_n + \xi_n^\gamma + \alpha_{n+1})_+$, avec $0 < \gamma < 1$

Théorème

Supposons $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R}$ *(accroissements bilatères) et* $B = [0, b]$ *avec* $b > 1$*. Alors* B *est accessible. En outre,*

1. *Si* $\mathbb{P}(\alpha_1 < -y) \leq \frac{c}{y^\theta}$ *et* $\theta > 1 - \gamma$ *alors* $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) < 1$.
2. *Supposons* $\mathbb{P}(\alpha_1 > y) \leq \frac{c_d}{y^{\theta_d}}$ *et* $\mathbb{P}(\alpha_1 < -y) \geq \frac{c_g}{y^{\theta_g}}$*, avec* $0 < \theta_d < \theta_g < 1$ *(la queue droite plus lourde que la gauche).*

$$\theta_d < 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_0^q < \infty) < \infty, \forall q < 1.$$

Première extension du critère de Lyapunov-Foster

Théorème (AIM1996, MP2014)

$(Z_n)_n$ chaîne de Markov sur ensemble $\mathbb{Y}$, noyau stochastique P.

$$\mathrm{Dom}_+(P) = \{g : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}_+ | \int_{\mathbb{Y}} P(x, dy) g(y) < \infty, \forall x\}.$$

1. *S'il existe (V, b), avec $V \in \mathrm{Dom}_+(P)$ et $b > 0$, t.q.*
   - *$DV(y) \leq 0$ sur B^c, où $B = S_b(V) = \{y \in \mathbb{Y} : V(y) \leq b\}$,*
   - $\lim V(y) = \infty$,
   - *et si B est accessible,*

   alors $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) = 1$.
2. *S'il existe (V, B) avec $V \in \mathrm{Dom}_+(P)$ et $B \subset \mathbb{Y}$, t.q.*
   - *$DV(y) \leq 0$ sur B^c et*
   - $\exists y \in B^c : V(y) < \inf_{z \in B} V(z)$,

   alors $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) < 1$.

Résultats découlant de première extension

- $\theta > 1-\gamma$: Essayer $V(x) = x^\delta$, avec $0 < \delta < \theta$.
  - Estimer $DV(x) = -\delta x^{\delta+\gamma-1} + \delta b_2 K_{\delta,\theta} x^{\delta-\theta} + \mathcal{O}(x^{\delta-\theta-1})$.
  - Terme dominant : $DV(x) = -\delta x^{\delta+\gamma-1} + o(x^{\delta+\gamma-1}) \leq 0$, pour $x \geq x_0$.
  - Donc $\mathbb{P}_x(\tau_{S_{x_0}} < \infty) = 1$.
- $\theta < 1-\gamma$: Essayer $V(x) = x^{-\delta}$, avec $\delta > 0$.
  - Terme dominant : $DV(x) = -\delta b_1 K_{\delta,\theta} x^{\delta-\theta} + o(x^{\delta-\theta}) \leq 0$.
  - $V(x) \downarrow 0$.
  - Donc $\mathbb{P}_x(\tau_{S_{x_0}} < \infty) < 1$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Seconde extension du critère Lyapunov-Foster

Théorème (AIM1996, MP2014)

$(Z_n)_n$ chaîne de Markov sur ensemble $\mathbb{Y}$, noyau stochastique P.
$V \in \mathrm{Dom}_+(P)$ telle que $V(x) \to \infty$.

1. *S'il existe constantes positives (b, p, c) t.q.*
   - *$B = S_b(V)$ est accessible,*
   - *$V^p \in \mathrm{Dom}_+(P)$ et*
   - *$DV^p(y) \leq -cV^{p-2}(x)$ sur B^c,*

   alors $\mathbb{E}_x(\tau_B^q) < \infty$ pour $q < p/2$.
2. *Si certaines conditions techniques explicites (mais compliquées) remplies, alors $\mathbb{E}_x(\tau_B^q) = \infty$ pour $q > q_0$, où q_0 transition de sur-martingale à sous-martingale.*

Résultats découlant de seconde extension

- Utiliser de nouveau $V(x) = x^{\delta}$, avec $0 < \delta < \theta$.
- Par résultat précédent,

$$\theta > 1 - \gamma \Rightarrow \mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) = 1, \text{ où } B = S_{x_0}(V).$$

- Pour que $DV^p(x) = -\delta p V(x)^{p-2} + o(V(x)^{p-2}) \leq 0$ (pour $x \geq x_0$) soit vérifié, il faut que $\frac{1}{\delta} < \frac{2}{1-\gamma}$.
- $p\delta$ ne pourra excéder θ. On aura alors $0 < p < \frac{\theta}{\delta} < \frac{2\theta}{1-\gamma}$.
- Par conséquent, $\mathbb{E}_x(\tau_B^q) < \infty$ pour $q < \frac{\theta}{1-\gamma}$.
- Pour montrer non-existence des moments, on peut utiliser partie technique de l'extension. Cependant, pour ce cas précis, on a aussi une démonstration plus simple.