Processus de Hawkes à mémoire d'ordre variable

Eva Löcherbach et Pierre Hodara

Intensité du processus

- I est l'ensemble dénombrable des neurones.

Intensité du processus

- I est l'ensemble dénombrable des neurones.
- Z^i est un processus de comptage : pour des temps finis $s < t$, $Z^i(]s,t])$ correspond au nombre de spikes émis par le neurone i pendant l'intervalle de temps $]s,t]$.

Intensité du processus

- I est l'ensemble dénombrable des neurones.
- Z^i est un processus de comptage : pour des temps finis $s < t$, $Z^i(]s, t])$ correspond au nombre de spikes émis par le neurone i pendant l'intervalle de temps $]s, t]$.
- La famille de processus de comptage $(Z^i, i \in I)$ est caractérisée par son intensité $(\lambda_t^i, i \in I)$:

$$\mathbb{P}(Z^i \text{ saute durant } [\mathrm{t}\ ,\ \mathrm{t} + \mathrm{dt}\ ] | \mathcal{F}_t) = \lambda_t^i dt, i \in I.$$

où, $\mathcal{F}_t$ est la tribu engendrée par $Z^i(]s, u]), s \leq u \leq t, i \in I$.

Intensité du processus

$$\lambda_t^i = \psi_i \left(\sum_{j \in I} W_{j \to i} \left(Z^j(]L_t^i, t[) \wedge K_{j \to i} \right) \right).$$

avec

- $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de taux de sauts,
- $\{W_{j \to i} \in \mathbb{R}, i, j \in I\}$ une famille de "poids synaptiques" modélisant l'influence du neurone j sur le neurone i.
- $L_t^i := \sup\{s < t : Z^i(\{s\}) > 0\}$ est le dernier instant de spike du neurone i avant le temps t.
- $\{K_{j \to i} \in \mathbb{N}, i, j \in I\}$ une famille de seuils de saturation.

Hypothèses et définitions

On suppose que $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est croissante, majorée par un réel Λ_i, et on définit :

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\Lambda_i}.$$

Hypothèses et définitions

On suppose que $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est croissante, majorée par un réel Λ_i, et on définit :

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\Lambda_i}.$$

On suppose de plus que ces fonctions sont uniformément Lipschitziennes :

$$\exists \gamma \geq 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, i \in I, |\phi_i(x) - \phi_i(x')| \leq \gamma |x - x'|.$$

Hypothèses et définitions

On suppose que $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est croissante, majorée par un réel Λ_i, et on définit :

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\Lambda_i}.$$

On suppose de plus que ces fonctions sont uniformément Lipschitziennes :

$$\exists \gamma \geq 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, i \in I, |\phi_i(x) - \phi_i(x')| \leq \gamma |x - x'|.$$

On note :
$\mathcal{V}_{i\to\cdot} := \{j \in I, j \neq i : W_{i\to j} \neq 0\}$, l'ensemble des neurones directement influencés par i,

Hypothèses et définitions

On suppose que $\psi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est croissante, majorée par un réel Λ_i, et on définit :

$$\phi_i := \frac{\psi_i}{\Lambda_i}.$$

On suppose de plus que ces fonctions sont uniformément Lipschitziennes :

$$\exists \gamma \geq 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}, i \in I, |\phi_i(x) - \phi_i(x')| \leq \gamma |x - x'|.$$

On note :
$\mathcal{V}_{i\to\cdot} := \{j \in I, j \neq i : W_{i\to j} \neq 0\}$, l'ensemble des neurones directement influencés par i, et
$\mathcal{V}_{\cdot\to i} := \{j \in I, j \neq i : W_{j\to i} \neq 0\}$, l'ensemble des neurones qui ont une influence directe sur i.

On fait les hypothèses suivantes :

$$(1) \qquad \forall i \in I, W_{i\to i} = 0 \text{ et } \sup_{i \in I} \sum_j |W_{j\to i}| K_{j\to i} < \infty.$$

On fait les hypothèses suivantes :

(1) $$\forall i \in I, W_{i \to i} = 0 \text{ et } \sup_{i \in I} \sum_j |W_{j \to i}| K_{j \to i} < \infty.$$

(2) $$\forall i \in I, \exists \delta_i > 0, \psi_i \geq \delta_i.$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$(1) \qquad \forall i \in I, W_{i\to i} = 0 \text{ et } \sup_{i\in I} \sum_j |W_{j\to i}| K_{j\to i} < \infty.$$

$$(2) \qquad \forall i \in I, \exists \delta_i > 0, \psi_i \geq \delta_i.$$

On définit une suite croissante de voisinages $(V_i(k))_{k\geq 0}$, finis inclus dans I, tels que $V_i(0) = \emptyset$, $V_i(1) = \{i\}$, $V_i(k) \subset V_i(k+1)$, $V_i(k) \neq V_i(k+1)$ si $V_i(k) \neq \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$ et $\bigcup_k V_i(k) = \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$.

On fait les hypothèses suivantes :

$$(1) \qquad \forall i \in I, W_{i\to i} = 0 \text{ et } \sup_{i\in I} \sum_j |W_{j\to i}| K_{j\to i} < \infty.$$

$$(2) \qquad \forall i \in I, \exists \delta_i > 0, \psi_i \geq \delta_i.$$

On définit une suite croissante de voisinages $(V_i(k))_{k\geq 0}$, finis inclus dans I, tels que $V_i(0) = \emptyset$, $V_i(1) = \{i\}$, $V_i(k) \subset V_i(k+1)$, $V_i(k) \neq V_i(k+1)$ si $V_i(k) \neq \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$ et $\bigcup_k V_i(k) = \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$. On pose $\partial V_i(k-1) := V_i(k) \setminus V_i(k-1)$

On fait les hypothèses suivantes :

(1) $$\forall i \in I, W_{i\to i} = 0 \text{ et } \sup_{i\in I} \sum_j |W_{j\to i}| K_{j\to i} < \infty.$$

(2) $$\forall i \in I, \exists \delta_i > 0, \psi_i \geq \delta_i.$$

On définit une suite croissante de voisinages $(V_i(k))_{k\geq 0}$, finis inclus dans I, tels que $V_i(0) = \emptyset$, $V_i(1) = \{i\}$, $V_i(k) \subset V_i(k+1)$, $V_i(k) \neq V_i(k+1)$ si $V_i(k) \neq \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$ et $\bigcup_k V_i(k) = \mathcal{V}_{\cdot\to i} \cup \{i\}$. On pose $\partial V_i(k-1) := V_i(k) \setminus V_i(k-1)$ et on suppose que

(3) $$\sup_{i\in I} \left(\sum_{k\geq 1} \left[\left(\sum_{j\in V_i(k)} \frac{\Lambda_j - \delta_j}{\delta_i} \right) \left(\sum_{j\in \partial V_i(k-1)} |W_{j\to i}| \, K_{j\to i} \right) \right] \right) < \frac{1}{\gamma},$$

Théorème 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace de probabilité adapté au processus de comptage, il existe sur cet espace une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus canonique $\left(Z^i, i \in I\right)$ est stationnaire et possède l'intensité voulue.

Un modèle de spikes en cascade : intensité

$$\lambda_t^i = \psi_i \left(\sum_{j \in I} W_{j \to i} \int_{[L_t^i, t[} g_j(t-s) dZ_s^j \right).$$

où pour chaque $j \in I$, la fonction $g_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, décroissante et telle que $\int_0^{+\infty} g_j(x)dx < +\infty$.

Un modèle de spikes en cascade : intensité

$$\lambda_t^i = \psi_i \left(\sum_{j \in I} W_{j \to i} \int_{[L_t^i, t[} g_j(t-s) dZ_s^j \right).$$

où pour chaque $j \in I$, la fonction $g_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, décroissante et telle que $\int_0^{+\infty} g_j(x)dx < +\infty$.
Dans ce modèle, l'ensemble I des neurones est divisé en couches $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles qu'on ait la partition suivante : $I = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$.
Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ et $i \in I_n$, on suppose que $\mathcal{V}_{\cdot \to i} \subset I_{n-1}$.

Hypothèses

On suppose que

$$\sup_{i \in I} \sum_j |W_{j \to i}| < \infty,$$

Hypothèses

On suppose que

$$\sup_{i \in I} \sum_j |W_{j \to i}| < \infty,$$

et que

$$\sup_{i \in I} \left(\sum_{k \geq 1} \left[\left(k \left(\sum_{j \in V_i(k)} \Lambda_j \right) + 1 \right) \times \left(\sum_{j \in V_i(k-1)} |W_{j \to i}| \Lambda_j \int_{k-1}^{k} g_j(s) ds + \sum_{j \in \partial V_i(k-1)} |W_{j \to i}| \Lambda_j \int_0^k g_j(s) ds \right) \right] \right) < \frac{1}{\gamma}.$$

Théorème 2

Sur $(\Omega, \mathcal{A})$ il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus canonique $\left(Z^i, i \in I\right)$ est stationnaire et possède l'intensité voulue.

Idées de preuve

Soit $N(dt, di, dz)$ une Mesure de Poisson Aléatoire sur $\mathbb{R} \times I \times [0,1]$ d'intensité $dt \left(\sum_{i \in I} \Lambda_i \delta_i\right) dz$. On peut construire le processus $(Z^i, i \in I)$ ayant l'intensité voulue de la manière suivante : pour chaque $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$Z^i(C) = \int_C \int_{\{i\}} \int_{[0,1]} 1_{z \leq \frac{1}{\Lambda_i} \psi_i \left(\sum_j h_{j \to i} \left(\int_{[L_t^i, t[} g_j(t-s) dZ_s^j \right) \right)} N(dt, di, dz).$$

cf Brémaud et Massoulié (1996) ou Delattre, Fournier et Hoffmann (2014).

Cela revient à définir pour chaque neurone i un Processus de Poisson N^i d'intensité maximale Λ_i et de décider que le processus Z_i ne peut sauter qu'aux instants de sauts $\left(T_n^i\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ du processus N^i avec, pour chacun de ces instants, la probabilité suivante pour que cet instant $t = T_n^i$ soit également un instant de saut pour Z^i :

$$\mathbb{P}(Z^i(\{t\}) = 1 | \mathcal{F}_t) = \phi_i\left(\sum_j h_{j\to i}\left(\int_{[L_t^i, t[} g_j(t-s)dZ_s^j\right)\right).$$

On construit donc, à partir de la mesure de Poisson aléatoire N, la grille $\mathcal{G} = \{(i, T_n^i), i \in I\}$.

On construit donc, à partir de la mesure de Poisson aléatoire N, la grille $\mathcal{G} = \{(i, T_n^i), i \in I\}$.
Pour chacun des points (i, T_n^i) de cette grille, il va falloir décider si le neurone i émet un spike ou non, en tenant compte de la configuration vue comme un élément de l'ensemble $X := \{0,1\}^{\mathcal{G}}$.

On construit donc, à partir de la mesure de Poisson aléatoire N, la grille $\mathcal{G} = \{(i, T_n^i), i \in I\}$.
Pour chacun des points (i, T_n^i) de cette grille, il va falloir décider si le neurone i émet un spike ou non, en tenant compte de la configuration vue comme un élément de l'ensemble $X := \{0, 1\}^{\mathcal{G}}$.
On désigne donc une configuration par un élément $x = (x^i)_{i \in I}$ de X avec $x^i = (x^i(T_n^i))_{n \in \mathbb{Z}}$.

On construit donc, à partir de la mesure de Poisson aléatoire N, la grille $\mathcal{G} = \{(i, T_n^i), i \in I\}$.
Pour chacun des points (i, T_n^i) de cette grille, il va falloir décider si le neurone i émet un spike ou non, en tenant compte de la configuration vue comme un élément de l'ensemble $X := \{0, 1\}^{\mathcal{G}}$.
On désigne donc une configuration par un élément $x = (x^i)_{i \in I}$ de X avec $x^i = (x^i(T_n^i))_{n \in \mathbb{Z}}$.
Chaque élément $x \in X$ peut être vu comme une mesure ponctuelle en définissant

$$dx_i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^i(T_n^i) \delta_{T_n^i}.$$

On s'intéresse donc pour le premier modèle avec seuils de saturation à la probabilité conditionnelle

$$p_{(i,t)}(1|x) = \phi_i \left(\sum_j W_{j \to i} \left(x^j \left([L_t^i(x), t[\right) \wedge K_{j \to i} \right) \right).$$

On s'intéresse donc pour le premier modèle avec seuils de saturation à la probabilité conditionnelle

$$p_{(i,t)}(1|x) = \phi_i \left(\sum_j W_{j\to i} \left(x^j \left([L_t^i(x), t[\right) \wedge K_{j\to i} \right) \right) .$$

Et pour le second modèle de spikes en cascade, à

$$p_{(i,t)}(1|x) = \phi_i \left(\sum_j W_{j\to i} \int_{L_t^i(x)}^t g_j(t-s) dx_j(s) \right) .$$

Proposition 1 : Décomposition Kalikow pour le 1er modèle

On fixe $t = T_n^i$ et $i \in I$. Il existe des probabilités discrètes $(\mu_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et une famille de probabilités conditionnelles$(p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x))_{k\geq 0}$ sur $\{0,1\}$ telles qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_i(k) p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x),$$

Proposition 1 : Décomposition Kalikow pour le 1er modèle

On fixe $t = T_n^i$ et $i \in I$. Il existe des probabilités discrètes $(\mu_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et une famille de probabilités conditionnelles$(p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x))_{k\geq 0}$ sur $\{0,1\}$ telles qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_i(k) p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x),$$
2. $p_{(i,t)}^{[0]}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.

Proposition 1 : Décomposition Kalikow pour le 1er modèle

On fixe $t = T_n^i$ et $i \in I$. Il existe des probabilités discrètes $(\mu_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et une famille de probabilités conditionnelles$(p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x))_{k\geq 0}$ sur $\{0,1\}$ telles qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_i(k) p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x),$$
2. $p_{(i,t)}^{[0]}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.
3. Pour $k \geq 1$, $p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x)$ dépend uniquement des variables $x^j : j \in V_i(k)$.

Proposition 1 : Décomposition Kalikow pour le 1er modèle

On fixe $t = T_n^i$ et $i \in I$. Il existe des probabilités discrètes $(\mu_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ et une famille de probabilités conditionnelles$(p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x))_{k\geq 0}$ sur $\{0,1\}$ telles qu'on ait les propriétés suivantes :

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_i(k) p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x),$$
2. $p_{(i,t)}^{[0]}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.
3. Pour $k \geq 1$, $p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x)$ dépend uniquement des variables $x^j : j \in V_i(k)$.
4. $p_{(i,t)}^{[k]}(\cdot|x) \geq 0$ et $p_{(i,t)}^{[k]}(1|x) + p_{(i,t)}^{[k]}(0|x) = 1$.

Proposition 2 : Décomposition Kalikow pour le 2nd modèle

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la filtration naturelle associée à la mesure de Poisson aléatoire N. Il existe des variables aléatoires, toutes $\mathcal{F}_t -$ measurable, $\left(\mu_{(i,t)}(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donnant une loi discrète sur $\mathbb{N}$ et $\left(p^{[k]}_{(i,t)}(a|x)\right)_{k\geq 0, a\in\{0,1\}}$ telles que

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_{(i,t)}(k) p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x),$$

Proposition 2 : Décomposition Kalikow pour le 2nd modèle

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la filtration naturelle associée à la mesure de Poisson aléatoire N. Il existe des variables aléatoires, toutes $\mathcal{F}_t -$ measurable, $\left(\mu_{(i,t)}(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donnant une loi discrète sur $\mathbb{N}$ et $\left(p^{[k]}_{(i,t)}(a|x)\right)_{k\geq 0, a\in\{0,1\}}$ telles que

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_{(i,t)}(k) p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x),$$
2. $p^{[0]}_{(i,t)}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.

Proposition 2 : Décomposition Kalikow pour le 2nd modèle

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la filtration naturelle associée à la mesure de Poisson aléatoire N. Il existe des variables aléatoires, toutes $\mathcal{F}_t$ – measurable, $\left(\mu_{(i,t)}(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donnant une loi discrète sur $\mathbb{N}$ et $\left(p^{[k]}_{(i,t)}(a|x)\right)_{k\geq 0, a\in\{0,1\}}$ telles que

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_{(i,t)}(k) p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x),$$
2. $p^{[0]}_{(i,t)}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.
3. Pour $k \geq 1$, $p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x)$ dépend uniquement des variables $\left(x(j, T^j_n) : (j, T^j_n) \in V_i(k) \times [t-k; t[\right)$.

Proposition 2 : Décomposition Kalikow pour le 2nd modèle

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la filtration naturelle associée à la mesure de Poisson aléatoire N. Il existe des variables aléatoires, toutes $\mathcal{F}_t$ – measurable, $\left(\mu_{(i,t)}(k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donnant une loi discrète sur $\mathbb{N}$ et $\left(p^{[k]}_{(i,t)}(a|x)\right)_{k\geq 0, a\in\{0,1\}}$ telles que

1. $$p_{(i,t)}(\cdot|x) = \sum_{k\geq 0} \mu_{(i,t)}(k) p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x),$$
2. $p^{[0]}_{(i,t)}(\cdot|x)$ ne dépend pas de la configuration x.
3. Pour $k \geq 1$, $p^{[k]}_{(i,t)}(\cdot|x)$ dépend uniquement des variables $\left(x(j, T^j_n) : (j, T^j_n) \in V_i(k) \times [t-k; t[\right)$.
4. $p^{[k]}_{(i,t)}(1|x) \in [0, 1]$, et $p^{[k]}_{(i,t)}(1|x) + p^{[k]}_{(i,t)}(0|x) = 1$.

MERCI