Équation de Langevin avec petites perturbations browniennes ou alpha-stables

Richard Eon
sous la direction de Mihai Gradinaru

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

Journées de probabilités 2015, Toulouse

$$
\begin{aligned}
v_t &= v_0 - \int_0^t \operatorname{sign}(v_s)|v_s|^\beta \mathrm{d}s \\
x_t &= \int_0^t v_s \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} v_t^{\varepsilon} &= v_0 - \int_0^t \mathrm{sign}(v_s^{\varepsilon})|v_s^{\varepsilon}|^{\beta}\mathrm{d}s + \varepsilon \ell_t \\ x_t^{\varepsilon} &= \int_0^t v_s^{\varepsilon}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

1) Processus de Lévy et calcul stochastique
2) Étude du comportement de la vitesse et de la position pour une vitesse initiale non nulle
3) Étude du comportement en temps long à l'équilibre

1) Processus de Lévy et calcul stochastique
2) Étude du comportement de la vitesse et de la position pour une vitesse initiale non nulle
3) Étude du comportement en temps long à l'équilibre

1) Processus de Lévy et calcul stochastique
2) Étude du comportement de la vitesse et de la position pour une vitesse initiale non nulle
3) Étude du comportement en temps long à l'équilibre

Processus de Lévy et calcul stochastique

Processus de Lévy

Processus de Lévy

Un processus de Lévy X est un processus qui vérifie :

- $X_0 = 0$ presque sûrement
- X est à accroissements indépendants et stationnaires
- X est càdlàg

Processus α-stable

Un processus de Lévy X est appelé α-stable pour $\alpha \in (0, 2]$ si les processus $(X_{c^{\alpha}t})_t$ et $(cX_t)_t$ ont la même loi pour tout $c > 0$.

Remarque : Pour $\alpha = 2$, le processus est un mouvement Brownien standard et pour $\alpha \in (0, 2)$, le processus est purement à sauts.

Processus de Lévy

Processus de Lévy

Un processus de Lévy X est un processus qui vérifie :

- $X_0 = 0$ presque sûrement
- X est à accroissements indépendants et stationnaires
- X est càdlàg

Processus α-stable

Un processus de Lévy X est appelé α-stable pour $\alpha \in (0, 2]$ si les processus $(X_{c^\alpha t})_t$ et $(cX_t)_t$ ont la même loi pour tout $c > 0$.

Remarque : Pour $\alpha = 2$, le processus est un mouvement Brownien standard et pour $\alpha \in (0, 2)$, le processus est purement à sauts.

Processus de Lévy

Processus de Lévy

Un processus de Lévy X est un processus qui vérifie :

- $X_0 = 0$ presque sûrement
- X est à accroissements indépendants et stationnaires
- X est càdlàg

Processus α-stable

Un processus de Lévy X est appelé α-stable pour $\alpha \in (0, 2]$ si les processus $(X_{c^\alpha t})_t$ et $(cX_t)_t$ ont la même loi pour tout $c > 0$.

Remarque : Pour $\alpha = 2$, le processus est un mouvement Brownien standard et pour $\alpha \in (0, 2)$, le processus est purement à sauts.

Mesure de Poisson

Soit $(S; \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Mesure de Poisson

Soit μ une mesure σ-finie sur $(S; \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson N sur $(S; \mathcal{A})$ est une collection de variables aléatoires $(N(B); B \in \mathcal{A})$ telle que :

- pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$,
- si $A_1, \dots, A_m$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{A}$, les variables aléatoires $N(A_1), \dots, N(A_m)$ sont indépendantes,
- pour tout $\omega \in \Omega, A \mapsto N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur $(S, \mathcal{A})$.

Mesure et intégrale de Poisson

Si X est un processus de Lévy,

$$N([0,T],A) := \#\{0 \leq s \leq t,\, X_t - X_{t^-} \in A\}$$

est une mesure de Poisson.

Intégrale de Poisson

Soit N une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mu$ sur $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\{0\})$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne et si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}/\{0\})$ vérifie $\mu(A) < +\infty$, on définit, pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$, l'intégrale stochastique de Poisson de f par :

$$\int_A f(z)N(t,\mathrm{d}z) := \sum_{z \in A} f(z)N(t,\{z\}).$$

Mesure et intégrale de Poisson

Si X est un processus de Lévy,

$$N([0,T],A) := \#\{0 \leq s \leq t,\ X_t - X_{t^-} \in A\}$$

est une mesure de Poisson.

Intégrale de Poisson

Soit N une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mu$ sur $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\{0\})$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne et si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}/\{0\})$ vérifie $\mu(A) < +\infty$, on définit, pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$, l'intégrale stochastique de Poisson de f par :

$$\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z) := \sum_{z \in A} f(z) N(t, \{z\}).$$

Décomposition d'Itô-Lévy

Théorème de décomposition d'Itô-Lévy

Si X est un processus de Lévy alors il existe $b \in \mathbb{R}$, un mouvement brownien standard B, un coefficient de diffusion σ et une mesure aléatoire de Poisson N sur $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\{0\})$, d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mu$ où μ est une mesure de Lévy (i.e. vérifiant $\int_{\mathbb{R}/\{0\}} (1 \wedge z^2)\mu(\mathrm{d}z) < +\infty$) tels que, pour tout $t \geq 0$:

$$X_t = bt + \sigma B_t + \int_{0<|z|<1} z\tilde{N}(t, \mathrm{d}z) + \int_{|z|>1} z N(t, \mathrm{d}z)$$

où $\tilde{N}$ est la mesure de Poisson compensée de N définie par : $\tilde{N}(t, \mathrm{d}z) = N(t, \mathrm{d}z) - t\mu(\mathrm{d}z)$.

Décomposition d'Itô-Lévy

Corollaire

Si X est un processus de Lévy α-stable pour $\alpha \in (0,2)$, on a :

$$X_t = \int_{0<|z|<1} z\,\tilde{N}(t,\mathrm{d}z) + \int_{|z|>1} z\,N(t,\mathrm{d}z)$$

où la mesure de Lévy μ est $\mu(\mathrm{d}z) = |z|^{-1-\alpha}\mathrm{d}z$.

Formule d'Itô-Lévy

Théorème

Soit X un processus de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{0<|z|<1} H(s,z)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{|z|>1} K(s,z)N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),$$

alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s^-})b(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f'(X_{s^-})\sigma(s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s^-})\sigma^2(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \int_{0<|z|<1} [f(X_{s^-} + H(s,z)) - f(X_{s^-})]\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) \\
&+ \int_0^t \int_{0<|z|<1} [f(X_{s^-} + H(s,z)) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-})H(s,z)]\mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}z) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|>1} [f(X_{s^-} + K(s,z)) - f(X_{s^-})]N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z).
\end{aligned}$$

Étude du comportement de la vitesse et de la position pour une vitesse initiale non nulle

Proposition, Gradinau et E.

- Pour $\beta \geq 0$, quand $\varepsilon \to 0$, $\{v_t^\varepsilon : t \geq 0\}$ (respectivement x^ε) converge vers v (respectivement x) en probabilité uniformement sur tout intervalle compact.
- Pour $\beta \geq 1$, on introduit $Z_t := -\int_0^t \beta|v_s|^{\beta-1}Z_s \mathrm{d}s + \ell_t$. On a $\frac{1}{\varepsilon}(v^\varepsilon - v - \varepsilon Z)$ et $\frac{1}{\varepsilon}(x^\varepsilon - x - \varepsilon \int Z)$ convergent UCP vers 0, quand $\varepsilon \to 0$.

Étude du comportement en temps long à l'équilibre

On pose, pour $t \geq 0$,

$$X_t^\varepsilon := x_{\varepsilon^{-\alpha} t}^\varepsilon \quad \text{et} \quad V_t^\varepsilon := v_{\varepsilon^{-\alpha} t}^\varepsilon$$

qui satisfont alors respectivement,

$$X_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_0^t V_s^\varepsilon \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad V_t^\varepsilon = L_t^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_0^t \mathrm{sgn}(V_s^\varepsilon) |V_s^\varepsilon|^\beta \mathrm{d}s.$$

où $\{L_t^\varepsilon := \varepsilon \ell_{\varepsilon^{-\alpha} t} : t \geq 0\}$ est aussi un processus α-stable.

Théorème, Gradinaru et E.

Supposons que $0 < \alpha \leq 2$ et $\beta + \frac{\alpha}{2} > 2$, on pose $\theta := \frac{\alpha}{\alpha+\beta-1} \in (0,1)$. Alors il existe une constante positive $\kappa_{\alpha,\beta}$ telle que le processus

$$\left\{\varepsilon^{\theta(\beta+\frac{\alpha}{2}-2)} x^{\varepsilon}_{\varepsilon^{-\alpha} t} : t \geq 0\right\} = \left\{\varepsilon^{\theta(\beta+\frac{\alpha}{2}-2)} X^{\varepsilon}_{t} : t \geq 0\right\}$$

converge en distribution vers un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{\alpha,\beta}$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus, si $\alpha = 2$, le résultat est vrai pour $-1 < \beta \leq 1$.

Si $\alpha + \beta - 1 > 0$, on pose

$$\check{L}_t^\varepsilon := \frac{L^\varepsilon_{t\,\varepsilon^{\alpha\theta}}}{\varepsilon^\theta} = \frac{\ell_{t\,\varepsilon^{-\theta(\beta-1)}}}{\varepsilon^{\frac{\theta(\beta-1)}{\alpha}}} \quad \text{et} \quad \check{V}_t^\varepsilon := \frac{V^\varepsilon_{t\,\varepsilon^{\alpha\theta}}}{\varepsilon^\theta}.$$

Par auto-similarité, $\check{L}^\varepsilon$ est un processus de Lévy α-stable et on a :

$$X_t^\varepsilon = \varepsilon^{\theta(2-\beta)} \int_0^{t\varepsilon^{-\alpha\theta}} \check{V}_s^\varepsilon \mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \check{V}_t^\varepsilon = \check{L}_t^\varepsilon - \int_0^t \operatorname{sgn}(\check{V}_s^\varepsilon)|\check{V}_s^\varepsilon|^\beta \mathrm{d}s.$$

Théorème de Whitt

Pour $n \geq 1$, soit $M_n = (M_{n,1}, \ldots, M_{n,k})$ une martingale locale dans $\mathcal{D}^k$ pour une filtration $\mathcal{F}_n$, satisfaisant $M_n(0) = (0, \ldots, 0)$. Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice de covariance de taille k^2. Si M_n est de carré intégrable, on peut introduire la covariation quadratique prédictible $\langle M_{n,i}, M_{n,j} \rangle$. Si, de plus, pour tout $T > 0$ et $(i,j) \in [|1,k|]^2$, on a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}[J(\langle M_{n,i}, M_{n,j} \rangle, T) = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}[J(M_n, T)^2] = 0$
- $\langle M_{n,i}, M_{n,j} \rangle(t) \Rightarrow c_{i,j}t$

alors $M_n \Rightarrow M$ dans $\mathcal{D}^k$ où M est un $(0, C)$-mouvement brownien.

Schéma de preuve dans le cas Brownien

Étape 1 On résout l'équation de Poisson :

$$(\mathcal{L}_{2,\beta}\, g_\beta)(x) = x \quad \text{où} \quad \mathcal{L}_{2,\beta} := \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \operatorname{sgn}(x)|x|^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

La solution est :

$$g_\beta(x) = \int_0^x \left(\int_y^{+\infty} -2z\mathrm{e}^{c_\beta(z)}\mathrm{d}z \right) \mathrm{e}^{-c_\beta(y)}\mathrm{d}y,$$

avec $c_\beta(x) := -\frac{2}{\beta+1}|x|^{\beta+1}$.

Schéma de preuve dans le cas Brownien

Étape 1 On résout l'équation de Poisson :

$$(\mathcal{L}_{2,\beta}\, g_\beta)(x) = x \quad \text{où} \quad \mathcal{L}_{2,\beta} := \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \operatorname{sgn}(x)|x|^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

La solution est :

$$g_\beta(x) = \int_0^x \left(\int_y^{+\infty} -2z\mathrm{e}^{c_\beta(z)}\mathrm{d}z \right) \mathrm{e}^{-c_\beta(y)}\mathrm{d}y,$$

avec $c_\beta(x) := -\frac{2}{\beta+1}|x|^{\beta+1}$.

Schéma de preuve dans le cas Brownien

Étape 2 En utilisant la formule d'Itô, on obtient alors :

$$\varepsilon^{\theta(\beta-1)} X_t^{\varepsilon} = -\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_\beta(\check{V}_s)\mathrm{d}\check{B}_s + \varepsilon^{\theta} g_\beta\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right).$$

Étape 3 On montre que $\varepsilon^{\theta} g_\beta\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right)$ converge vers 0, UCP.

On utilise le théorème de Whitt et le théorème ergodique pour montrer que $-\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_\beta(\check{V}_s)\mathrm{d}\check{B}_s$ converge vers un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{2,\beta}$.

Étape 4 On utilise le théorème de Slutsky et le continuous mapping theorem pour conclure.

Schéma de preuve dans le cas Brownien

Étape 2 En utilisant la formule d'Itô, on obtient alors :

$$\varepsilon^{\theta(\beta-1)} X_t^{\varepsilon} = -\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_{\beta}(\check{V}_s)\mathrm{d}\check{B}_s + \varepsilon^{\theta} g_{\beta}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right).$$

Étape 3 On montre que $\varepsilon^{\theta} g_{\beta}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right)$ converge vers 0, UCP.

On utilise le théorème de Whitt et le théorème ergodique pour montrer que $-\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_{\beta}(\check{V}_s)\mathrm{d}\check{B}_s$ converge vers un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{2,\beta}$.

Étape 4 On utilise le théorème de Slutsky et le continuous mapping theorem pour conclure.

Schéma de preuve dans le cas Brownien

Étape 2 En utilisant la formule d'Itô, on obtient alors :

$$\varepsilon^{\theta(\beta-1)} X_t^{\varepsilon} = -\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_{\beta}(\check{V}_s) \mathrm{d}\check{B}_s + \varepsilon^{\theta} g_{\beta}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right).$$

Étape 3 On montre que $\varepsilon^{\theta} g_{\beta}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-2\theta}}\right)$ converge vers 0, UCP.

On utilise le théorème de Whitt et le théorème ergodique pour montrer que $-\varepsilon^{\theta} \int_0^{t\,\varepsilon^{-2\theta}} g'_{\beta}(\check{V}_s) \mathrm{d}\check{B}_s$ converge vers un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{2,\beta}$.

Étape 4 On utilise le théorème de Slutsky et le continuous mapping theorem pour conclure.

Le cas purement à sauts

Étape 1 Par la décomposition de Itô-Lévy, il existe un processus de Poisson N et son compensé $\tilde{N}$ tel que

$$\check{L}_t = \int_0^t \int_{|z|\le 1} z\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{|z|>1} zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Le générateur de $\check{V}$ est :

$$(\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, g)(x) = -\mathrm{sgn}(x)|x|^\beta g'(x) + \int_{\mathbb{R}} \left[g(x+y) - g(x) - yg'(x)1_{|y|\le 1}\right]\nu(\mathrm{d}y).$$

Pour résoudre l'Équation de Poisson, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov h (i.e. : $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, h \le -Ch$). Le théorème de Glynn et Meyn nous assure alors l'existence d'une solution $\hat{g}$ vérifiant $|\hat{g}| \le c(h+1)$, avec c une constante positive.

Le cas purement à sauts

Étape 1 Par la décomposition de Itô-Lévy, il existe un processus de Poisson N et son compensé $\tilde{N}$ tel que

$$\check{L}_t = \int_0^t \int_{|z|\leq 1} z\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{|z|>1} zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Le générateur de $\check{V}$ est :

$$(\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, g)(x) = -\mathrm{sgn}(x)|x|^{\beta} g'(x) + \int_{\mathbb{R}} \left[g(x+y) - g(x) - yg'(x) 1_{|y|\leq 1} \right] \nu(\mathrm{d}y).$$

Pour résoudre l'Équation de Poisson, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov h (i.e. : $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}\, h \leq -Ch$). Le théorème de Glynn et Meyn nous assure alors l'existence d'une solution $\hat{g}$ vérifiant $|\hat{g}| \leq c(h+1)$, avec c une constante positive.

Le cas purement à sauts

Étape 2 En utilisant la formule d'Itô-Lévy, on obtient alors :

$$\varepsilon^{\theta(\beta+\frac{\alpha}{2}-2)} X_t^\varepsilon = \varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} \hat{g}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}\right) - \varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} M_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}},$$

avec

$$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\hat{g}(z+\check{V}_s) - \hat{g}(\check{V}_s)]\tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Étape 3 On montre que $\varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} \hat{g}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}\right)$ converge vers 0, UCP.

On utilise le théorème de Whitt et le théorème ergodique pour montrer que $\varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} M_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}$ converge vers un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{\alpha,\beta}$.

Le cas purement à sauts

Étape 2 En utilisant la formule d'Itô-Lévy, on obtient alors :

$$\varepsilon^{\theta(\beta+\frac{\alpha}{2}-2)} X_t^{\varepsilon} = \varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} \hat{g}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}\right) - \varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} M_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}},$$

avec

$$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\hat{g}(z+\check{V}_s) - \hat{g}(\check{V}_s)] \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Étape 3 On montre que $\varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} \hat{g}\left(\check{V}_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}\right)$ converge vers 0, UCP.

On utilise le théorème de Whitt et le théorème ergodique pour montrer que $\varepsilon^{\frac{\alpha\theta}{2}} M_{t\,\varepsilon^{-\alpha\theta}}$ converge vers

un mouvement Brownien avec coefficient de diffusion $\kappa_{\alpha,\beta}$.

Le cas purement à sauts

Étape 4 On utilise le théorème de Slutsky et le continuous mapping theorem pour conclure.

- Applebaum, D., *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2011.
- Bhattacharya, R. N., On the functional central limit theorem and the law of iterated logarithm for Markov processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **60** (1982), 185-201.
- Billingsley, P. *Convergence of Probability Measures*, Second Edition, Wiley-Interscience, 1999.
- Fournier, N. On pathwise uniqueness for stochastic differential equations driven by stable Lévy processes. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **49** (2013), 138-159.
- Glynn, P.W., Meyn S.P., A Lyapunov bound for solutions of the Poisson equation. Ann. Probab. **24** (1996), 916-931.

Gradinaru, M., Pavlyukevich, I., Small noise asymptotics of solutions of the Langevin equation with non-linear damping subject α-stable Lévy forcing, in preparation.

Hintze, R., Pavlyukevich, I. Small noise asymptotics and first passage times integrated Ornstein-Uhlenbeck process driven by α-stable Lévy process, Bernoulli **20** (2014), 265-281.

Kulik, A.M., Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise, Stochastic Proc. Appl. **119** (2009), 602-632.

Rogers, L.C.G., Williams, D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, vol. 2, Itô calculus*, John Wiley & Sons, 1987.

Samorodnitsky, G., Grigoriu, M., *Tails of solutions of certain nonlinear stochastic differential equations driven by heavy* *tailed Levy motions*, Stochastic Proc. Appl. **105** (2003), 69-97.

Whitt, W., Proofs of the martingale FCLT, Probability Surveys **4** (2007), 268-302.