

Diffusions auto-interagissantes: Un cas périodique

Carl-Erik Gauthier
sous la supervision de Michel Benaïm

Université de Neuchâtel

27 Mai 2015

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Outline

Introduction

- Définition et Résultats existants
- Présentation du problème considéré

Cas attractif

- Schéma de la preuve
- Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)
- Fin de la preuve

Outline

Introduction

- Définition et Résultats existants
- Présentation du problème considéré

Cas attractif

- Schéma de la preuve
- Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)
- Fin de la preuve

Cas répulsif

- Les Résultats
- Schéma de preuve

Outline

Introduction

- Définition et Résultats existants
- Présentation du problème considéré

Cas attractif

- Schéma de la preuve
- Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)
- Fin de la preuve

Cas répulsif

- Les Résultats
- Schéma de preuve

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Qu'est une diffusion auto-interagissante ?

Définition

Un processus stochastique continu en temps $(X_t)_{t \geq 0}$ est une diffusion auto-interagissante de potentiel V et de fonction de poids g si elle est solution de l'EDS

$$dX_t = dB_t(X_t) - g(t) \left[\int_0^t \nabla V_{X_s}(X_t) ds \right] dt, \quad (1)$$

avec $V_x(y) = V(x, y)$

Qu'est une diffusion auto-interagissante ?

Définition

Un processus stochastique continu en temps $(X_t)_{t \geq 0}$ est une diffusion auto-interagissante de potentiel V et de fonction de poids g si elle est solution de l'EDS

$$dX_t = dB_t(X_t) - g(t) \left[\int_0^t \nabla V_{X_s}(X_t) ds \right] dt, \quad (1)$$

avec $V_x(y) = V(x, y)$

Par exemple, $V(x, y) = v(y - x)$ pour une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Résultats existants

Le cas où M est une variété Riemannienne et $g(t) = \frac{1}{t}$ a été en premier étudié par Benaïm, Raimond et Ledoux; puis sur \mathbb{R}^d par Kurtzmann. Dans ces papiers, les résultats principaux consistent en une description précise du comportement en temps long de la mesure d'occupation renormalisé $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds$.

Résultats existants

Le cas où M est une variété Riemannienne et $g(t) = \frac{1}{t}$ a été en premier étudié par Benaïm, Raimond et Ledoux; puis sur \mathbb{R}^d par Kurtzmann. Dans ces papiers, les résultats principaux consistent en une description précise du comportement en temps long de la mesure d'occupation renormalisé $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds$.

Lorsque $M = \mathbb{R}^{(d)}$, $g(t) = 1$ et $V(x, y) = v(y - x)$, des résultats de convergence presque sûre ont été obtenu pour des fonctions v satisfaisant $xv'(x) > 0 \forall x \neq 0$ ($\langle x, v'(x) \rangle \geq 0$ lorsque $d > 1$) par Cranston, Herrmann, Le Jan, Raimond, Roynette et Scheutzow.

Résultats existants

Le cas où M est une variété Riemannienne et $g(t) = \frac{1}{t}$ a été en premier étudié par Benaïm, Raimond et Ledoux; puis sur \mathbb{R}^d par Kurtzmann. Dans ces papiers, les résultats principaux consistent en une description précise du comportement en temps long de la mesure d'occupation renormalisé $\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X_s} ds$.

Lorsque $M = \mathbb{R}^{(d)}$, $g(t) = 1$ et $V(x, y) = v(y - x)$, des résultats de convergence presque sûre ont été obtenu pour des fonctions v satisfaisant $xv'(x) > 0 \forall x \neq 0$ ($\langle x, v'(x) \rangle \geq 0$ lorsque $d > 1$) par Cranston, Herrmann, Le Jan, Raimond, Roynette et Scheutzow. Plus précisément, on a, sur \mathbb{R} , les énoncés suivants ...

Résultats existants II

Soit X_t la solution de

$$dX_t = dB_t - \int_0^t v'(X_t - X_s) ds dt, \quad X_0 = 0.$$

Théorème (Cranston, Le Jan, '95)

Si $v'(x) = x$ ou $v'(x) = \text{sgn}(x)$, alors X_t converge p.s.

Résultats existants II

Soit X_t la solution de

$$dX_t = dB_t - \int_0^t v'(X_t - X_s) ds dt, \quad X_0 = 0.$$

Théorème (Cranston, Le Jan, '95)

Si $v'(x) = x$ ou $v'(x) = \text{sgn}(x)$, alors X_t converge p.s.

Théorème (Herrmann, Roynette, '03)

Si v' est une fonction continue bornée, monotone croissante, impaire et tel qu'il existe des constantes $C, \rho > 0$ et $k \in \mathbb{N}^$ tel que $|v'(x)| \geq C \exp(-\rho/|x|^k)$ sur un voisinage de 0, alors X_t converge p.s.*

Résultats existants III : Vitesse de convergence

Théorème (Herrmann, Scheutzow, '04)

Si $v'(x) = x$, alors $|X_t - X_\infty| = \mathcal{O}(\sqrt{\frac{\log(t)}{t}})$ et cette vitesse est optimale.

Si v' est une fonction impaire de classe \mathcal{C}^1 monotone croissante et tel qu'il existe $\gamma \geq 1$, $C > 0$ de sorte que

$|v'(x) - v'(y)| \geq C|x - y|^\gamma$ sur un voisinage de 0, alors pour $\mu < 1/(1 + \gamma)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{\log(t)}\right)^\mu \sup_{s \geq t} |X_s - X_t| = 0.$$

Résultats existants III

Lorsque $xv'(x) < 0$, on est dans un cadre répulsif, et d'autres types de résultats sont obtenus, notamment par :

Résultats existants III

Lorsque $xv'(x) < 0$, on est dans un cadre répulsif, et d'autres types de résultats sont obtenus, notamment par :

Durrett et Rogers en 1992

Cranston et Mountford en 1996

Mountford et Tarrès en 2008

Résultats existants III

Lorsque $xv'(x) < 0$, on est dans un cadre répulsif, et d'autres types de résultats sont obtenus, notamment par :

Durrett et Rogers en 1992

Cranston et Mountford en 1996

Mountford et Tarrès en 2008

Tóth, Tarrès et Valkó en 2012

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

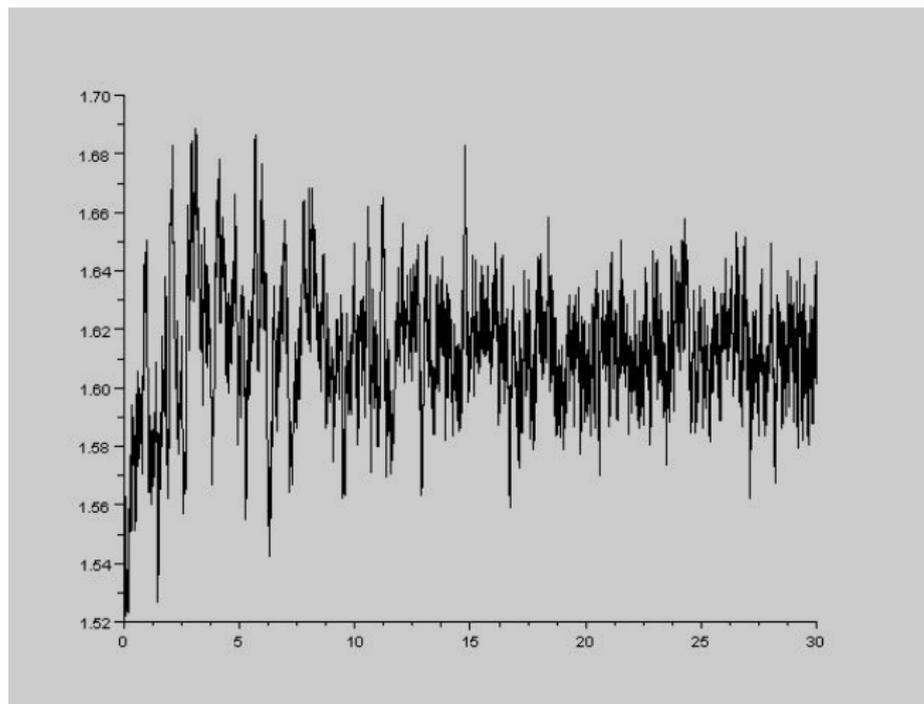
Un cas périodique

Durant cet exposé, on considère la diffusion renforcée

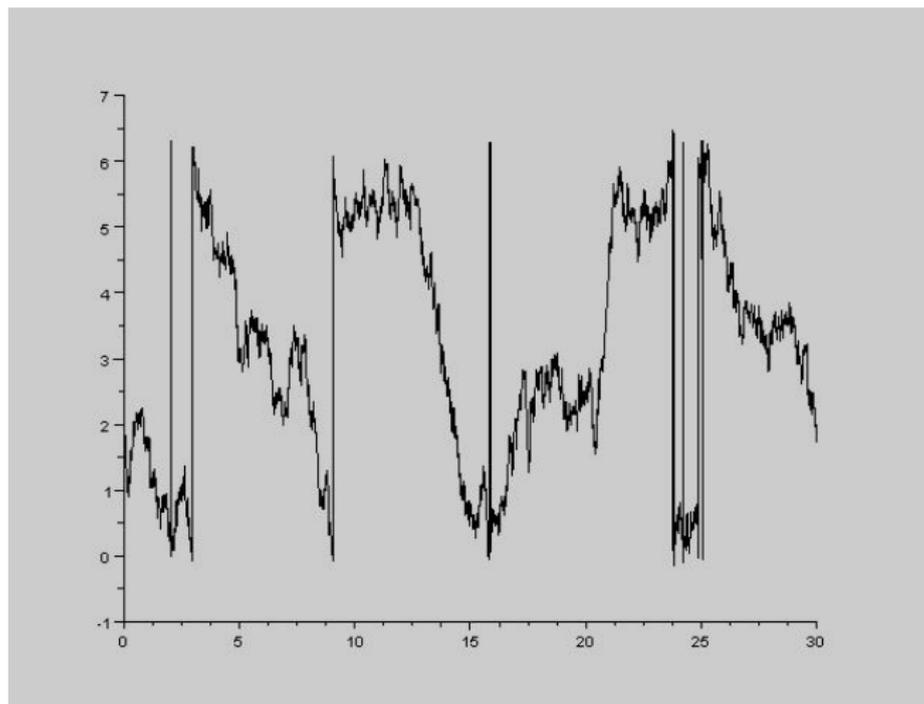
$$dX_t = dB_t + a \int_0^t \sin(X_t - X_s) ds dt, \quad (2)$$

où $a \neq 0$ et $(B_t)_t$ est un mouvement Brownien réel.

$a < 0$



$$a > 0$$



Comment aborder le problème ?

Comme vous l'avez peut-être remarqué, les diffusions renforcées ne sont pas Markoviennes.

Comment aborder le problème ?

Comme vous l'avez peut-être remarqué, les diffusions renforcées ne sont pas Markoviennes.

Le but est donc de "transformer" (2) pour avoir une vraie EDS.

Comment aborder le problème ?

Comme vous l'avez peut-être remarqué, les diffusions renforcées ne sont pas Markoviennes.

Le but est donc de "transformer" (2) pour avoir une vraie EDS.

On introduit alors les variables...

$$U_t = \int_0^t \cos(X_s) ds \text{ et } V_t = \int_0^t \sin(X_s) ds.$$

Systeme engendré

On obtient alors l'EDS suivante sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} dX_t &= a(\sin(X_t)U_t - \cos(X_t)V_t)dt + dB_t \\ dU_t &= \cos(X_t)dt, \\ dV_t &= \sin(X_t)dt \end{cases} \quad (3)$$

où \mathbb{S}^1 est identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Outline

Introduction

- Définition et Résultats existants
- Présentation du problème considéré

Cas attractif

- Schéma de la preuve
- Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)
- Fin de la preuve

Cas répulsif

- Les Résultats
- Schéma de preuve

Le résultat

Théorème (C-E.G,'15)

Si $a < 0$, il existe alors une variable aléatoire X_∞ telle que
 $|X_t - X_\infty| = \mathcal{O}(t^{-1/4} \sqrt{\log t})$ *p.s.*

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Un double changement de variable I

Le premier changement de variable consiste à poser

$$C_t = \cos(X_t)U_t + \sin(X_t)V_t \text{ et } A_t = \sin(X_t)U_t - \cos(X_t)V_t.$$

Un double changement de variable I

Le premier changement de variable consiste à poser

$C_t = \cos(X_t)U_t + \sin(X_t)V_t$ et $A_t = \sin(X_t)U_t - \cos(X_t)V_t$.

On obtient alors le système :

$$X_t = B_t + a \int_0^t A_s ds. \quad (4)$$

et

$$\begin{aligned} dC_t &= (1 - aA_t^2)dt - \frac{1}{2}C_t dt - 1A_t dB_t \\ dA_t &= aA_t C_t dt - \frac{1}{2}A_t dt + 1C_t dB_t \end{aligned} \quad (5)$$

Un double changement de variable II

Le deuxième changement est un passage au coordonnées polaires :
 $(C_t, A_t) = (r_t \cos(Y_t), r_t \sin(Y_t))$.

Un double changement de variable II

Le deuxième changement est un passage au coordonnées polaires : $(C_t, A_t) = (r_t \cos(Y_t), r_t \sin(Y_t))$. Le système obtenu est donc :

$$\begin{cases} dY_t = dB_t + (ar_t - \frac{1}{r_t}) \sin(Y_t) dt \\ dr_t = \cos(Y_t) dt \end{cases} \quad (6)$$

Résultats intermédiaires I

Lemme

On a $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$ p.s.

Résultats intermédiaires I

Lemme

On a $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$ p.s.

Lemme

$((\cos(Y_t), \sin(Y_t)))_{t \geq 0}$ converge p.s vers $(1, 0)$. De plus,

$$\|(\cos(Y_t), \sin(Y_t)) - (1, 0)\| = \mathcal{O}(t^{-1/4} \sqrt{\log(t)}). \quad (7)$$

Résultats intermédiaires II

En exprimant $(U_t, V_t) = (\rho_t \cos(\theta_t), \sin(\theta_t))$, on obtient de (3)

$$\theta_t = X_t - Y_t.$$

Résultats intermédiaires II

En exprimant $(U_t, V_t) = (\rho_t \cos(\theta_t), \sin(\theta_t))$, on obtient de (3)

$$\theta_t = X_t - Y_t.$$

Par (6) et (4), la dynamique de θ_t est donnée par

$$d\theta_t = \frac{\sin(Y_t)}{r_t} dt. \quad (8)$$

Résultats intermédiaires II

En exprimant $(U_t, V_t) = (\rho_t \cos(\theta_t), \sin(\theta_t))$, on obtient de (3)

$$\theta_t = X_t - Y_t.$$

Par (6) et (4), la dynamique de θ_t est donnée par

$$d\theta_t = \frac{\sin(Y_t)}{r_t} dt. \quad (8)$$

Lemme

θ_t converge p.s et la vitesse de convergence est $\mathcal{O}(t^{-1/4} \sqrt{\log t})$.

"Preuve" du Lemme 2 :

Soit $g : (0, \infty) \rightarrow [1/\sqrt{-a}, \infty) : r \mapsto (-a)r + \frac{1}{r}$ de sorte que
 $dY_t = dB_t + g(r_t) \sin(Y_t) dt$.

"Preuve" du Lemme 2 :

Soit $g : (0, \infty) \rightarrow [1/\sqrt{-a}, \infty) : r \mapsto (-a)r + \frac{1}{r}$ de sorte que $dY_t = dB_t + g(r_t) \sin(Y_t) dt$. En utilisant le fait que $\liminf_t \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$, on effectue le changement

"Preuve" du Lemme 2 :

Soit $g : (0, \infty) \rightarrow [1/\sqrt{-a}, \infty) : r \mapsto (-a)r + \frac{1}{r}$ de sorte que $dY_t = dB_t + g(r_t) \sin(Y_t) dt$. En utilisant le fait que $\liminf_t \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$, on effectue le changement $Z_t = Y_{\alpha(t)}$, où α est la fonction inverse de $A(t) = \int_0^t g(r_s) ds$.

"Preuve" du Lemme 2 :

Soit $g : (0, \infty) \rightarrow [1/\sqrt{-a}, \infty) : r \mapsto (-a)r + \frac{1}{r}$ de sorte que $dY_t = dB_t + g(r_t) \sin(Y_t) dt$. En utilisant le fait que $\liminf_t \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$, on effectue le changement $Z_t = Y_{\alpha(t)}$, où α est la fonction inverse de $A(t) = \int_0^t g(r_s) ds$.

On a ainsi l'EDS :

$$dZ_t = \sqrt{\dot{\alpha}(t)} dW_t - \sin(Z_t) dt.$$

"Preuve" du Lemme 2 :

Soit $g : (0, \infty) \rightarrow [1/\sqrt{-a}, \infty) : r \mapsto (-a)r + \frac{1}{r}$ de sorte que $dY_t = dB_t + g(r_t) \sin(Y_t) dt$. En utilisant le fait que $\liminf_t \frac{r_t}{\sqrt{t}} \geq 1$, on effectue le changement $Z_t = Y_{\alpha(t)}$, où α est la fonction inverse de $A(t) = \int_0^t g(r_s) ds$.

On a ainsi l'EDS :

$$dZ_t = \sqrt{\dot{\alpha}(t)} dW_t - \sin(Z_t) dt.$$

Observons que $d\alpha(t) = \frac{dt}{g(r_{\alpha(t)})}$.

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Définition de TPA

Définition

Soit (M, d) un espace métrique et Φ un semi-flot. Une fonction continue $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ est une trajectoire pseudo-asymptotique pour Φ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \Phi_h(X(t))) = 0 \quad (9)$$

pour tout $T > 0$.

Définition de TPA

Définition

Soit (M, d) un espace métrique et Φ un semi-flot. Une fonction continue $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ est une trajectoire pseudo-asymptotique pour Φ si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \Phi_h(X(t))) = 0 \quad (9)$$

pour tout $T > 0$.

Si X_t est un processus stochastique, alors X_t est une trajectoire pseudo-asymptotique forte pour Φ si la limite (9) est satisfaite p.s.

Résultats concernant des TPA I

Théorème

Supposons que la fermeture de $X([0, \infty))$ est compacte dans un espace métrique M . Posons $L(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{X([t, \infty))}$. Si Φ admet une fonction de Lyapunov et que les équilibres dans $L(X)$ sont isolés, alors $X(t)$ converge vers l'un des équilibres quand $t \rightarrow \infty$.

Résultats concernant des TPA I

Théorème

Supposons que la fermeture de $X([0, \infty))$ est compacte dans un espace métrique M . Posons $L(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{X([t, \infty))}$. Si Φ admet une fonction de Lyapunov et que les équilibres dans $L(X)$ sont isolés, alors $X(t)$ converge vers l'un des équilibres quand $t \rightarrow \infty$.

Théorème

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne et $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\sigma^2(\cdot) \leq \varepsilon(\cdot)$ et

$$\forall k > 0, \int_0^{\infty} \exp(-k/\varepsilon(t)) dt < \infty. \quad (10)$$

Alors, toute solution of $dx_t = g(x_t)dt + \sigma(t)dB_t$ est avec probabilité 1 une PTA pour le flot induit par l'EDO $\dot{X}(t) = g(X(t))$.

Résultats concernant des TPA II

Lemme

Soit X_t la solution de l'EDS

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sqrt{\varepsilon(t)} dB_t, \quad (11)$$

avec condition initiale $X_0 = x$. Si

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon(t)}{t} = 0 \quad (12)$$

(p.ex. $\varepsilon(t) = \inf(1, t^{-\eta})$, avec $\eta > 0$),
alors $|X_t| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}(t) \sqrt{\log t})$.

Un résultat de comparaison

Lemme (Herrmann, Scheutzow, '04)

Soit h une fonction Lipschitzienne impaire telle que $x \mapsto \sqrt{x}h(\sqrt{x})$ est Lipschitzienne. Notons X_t la solution de l'EDS

$$dX_t = h(X_t) + \varepsilon(t)dB_t, \quad X_0 = x$$

où $\varepsilon(\cdot)$ est une fonction positive et bornée.

Soit g une fonction ayant les mêmes propriétés que h et telle que

$$\operatorname{sgn}(x)g(x) \geq \operatorname{sgn}(x)h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors $\mathbb{P}(X_t^2 \leq U_t, \forall t \geq 0) = 1$, où le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ a la même loi que $(Y_t^2)_{t \geq 0}$ avec Y_t la solution de

$$dY_t = g(Y_t) + \varepsilon(t)dB_t, \quad Y_0 = x.$$

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Preuve, suite

On pose $\varepsilon(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{g(r_{\alpha(t)})}$.

Preuve, suite

On pose $\varepsilon(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{g(r_{\alpha(t)})}$. En utilisant le fait que

$$A(t) \leq \int_0^t g\left(\frac{\sqrt{-a+1}}{\sqrt{-a}} + s\right) ds \leq C^2 t^2, \text{ on a}$$

Preuve, suite

On pose $\varepsilon(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{g(r_{\alpha(t)})}$. En utilisant le fait que

$A(t) \leq \int_0^t g\left(\frac{\sqrt{-a+1}}{\sqrt{-a}} + s\right) ds \leq C^2 t^2$, on a $\alpha(t) \geq \frac{t^{1/2}}{C^2}$; et donc

Preuve, suite

On pose $\varepsilon(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{g(r_{\alpha(t)})}$. En utilisant le fait que $A(t) \leq \int_0^t g\left(\frac{\sqrt{-a}+1}{\sqrt{-a}} + s\right) ds \leq C^2 t^2$, on a $\alpha(t) \geq \frac{t^{1/2}}{C^2}$; et donc

$$\varepsilon(t) \leq Ct^{-1/4}/2$$

pour t suffisamment grand.

Preuve, suite

On pose $\varepsilon(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{g(r_{\alpha(t)})}$. En utilisant le fait que $A(t) \leq \int_0^t g\left(\frac{\sqrt{-a}+1}{\sqrt{-a}} + s\right) ds \leq C^2 t^2$, on a $\alpha(t) \geq \frac{t^{1/2}}{C^2}$; et donc

$$\varepsilon(t) \leq Ct^{-1/4}/2$$

pour t suffisamment grand. En utilisant les Théorèmes précédents, on obtient la convergence p.s de Z_t et donc de Y_t .

Preuve, fin

En utilisant le lemme sur le cas linéaire et le résultat de comparaison, on obtient

Preuve, fin

En utilisant le lemme sur le cas linéaire et le résultat de comparaison, on obtient

$$|Z_t| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}(t)\sqrt{\log(t)})$$

et donc

Preuve, fin

En utilisant le lemme sur le cas linéaire et le résultat de comparaison, on obtient

$$|Z_t| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}(t)\sqrt{\log(t)})$$

et donc

$$|Y_t| = |Z_{A(t)}| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{g(r_t)}\right)^{1/2}\sqrt{\log(A(t))}\right).$$

Preuve, fin

En utilisant le lemme sur le cas linéaire et le résultat de comparaison, on obtient

$$|Z_t| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}(t)\sqrt{\log(t)})$$

et donc

$$|Y_t| = |Z_{A(t)}| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{g(r_t)}\right)^{1/2}\sqrt{\log(A(t))}\right).$$

On conclut en se rappelant la vitesse de croissance de r_t et la définition de g .

Outline

Introduction

- Définition et Résultats existants
- Présentation du problème considéré

Cas attractif

- Schéma de la preuve
- Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)
- Fin de la preuve

Cas répulsif

- Les Résultats
- Schéma de preuve

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Les résultats principaux I

Théorème (Benaïm & C-E.G, '15)

Soit $(P_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé au système (3) et $P_t(y_0, dy)$ sa probabilité de transition. Alors

- 1) Le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ est fortement Feller (c-à-d $P_t f$ est une fonction continue et bornée pour toute fonction f bornée et mesurable) et il existe une fonction $p_t(y_0, y)$ de classe $C^\infty((0, \infty), \mathbb{M}, \mathbb{M})$ telle que $P_t(y_0, dy) = p_t(y_0, y)dy$ pour tout $y_0 \in \mathbb{M}$ and $(L_z^* - \partial_t)p_t(y, z) = 0$,
- 2) La probabilité $\mu(dy) = \varphi(y)dy$, où $\varphi(x, u, v) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{a}{2}(u^2 + v^2))$ est l'unique probabilité invariante.
- 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{M}} |p_t(z, y) - \varphi(y)|dy = 0$ pour tout $z \in \mathbb{M}$.

Les résultats principaux II

Vitesses de convergences

Théorème (Dolbeault & Klar & Mouhot & Schmeiser, '13 et Benaïm & C-E.G, '15)

Pour tout $\eta > 0$ et $g \in L^2(\mu)$

$$\|P_t g - \int_{\mathbb{M}} g(y) \mu(dy)\|_{L^2(\mu)} \leq (1 + \eta) \|g - \int_{\mathbb{M}} g(y) \mu(dy)\|_{L^2(\mu)} e^{-\lambda t},$$

où

$$\lambda = \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{K_1}{1 + K_2 + K_3},$$

et les constantes $K_j < \infty$, $j = 1, 2, 3$, dépendent seulement des valeurs propres du Laplacien sur le cercle, du potentiel

$\Phi(u, v) = \frac{a}{2}(u^2 + v^2)$ et du cercle.

Théorème (Benaïm & C-E.G, '15)

Pour tout $z_0 \in \mathbb{M}$ et $t \geq 1$,

$$\|P_t(z_0, dz) - \mu(dz)\|_{TV} \leq (1 + \eta) \|h(1, z_0, z) - 1\|_{L^2(\mu)} e^{-\lambda(t-1)},$$

où $h(1, z_0, z) = \frac{\rho_1(z_0, z)}{\varphi(z)}$ et

$$\lambda = \frac{\eta}{1 + \eta} \frac{K_1}{1 + K_2 + K_3}.$$

Les constantes $K_j < \infty$, $j = 1, 2, 3$, sont les mêmes que ceux du théorème précédent.

Outline

Introduction

Définition et Résultats existants

Présentation du problème considéré

Cas attractif

Schéma de la preuve

Trajectoires pseudo-asymptotiques (TPA)

Fin de la preuve

Cas répulsif

Les Résultats

Schéma de preuve

Preuve du Théorème 1 I

Propriété "Fortement Feller"

La preuve repose sur la condition de Hörmander.

Preuve du Théorème 1 I

Propriété "Fortement Feller"

La preuve repose sur la condition de Hörmander.
C'est quoi ? De quoi a-t-on besoin ?

Preuve du Théorème 1 I

Propriété "Fortement Feller"

La preuve repose sur la condition de Hörmander.

C'est quoi ? De quoi a-t-on besoin ?

Définition

Pour deux champs vectoriels différentiable $A, B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, le crochet de Lie entre A et B est

$$[A, B](u) = DB(u)A(u) - DA(u)B(u).$$

Preuve du Théorème 1 II

Propriété "Fortement Feller"

On considère, sur une variété de dimension d , l'EDS :

$$dY_t = \sum_{i=1}^N G_i(Y_t) \circ dB_t^i + G_0(Y_t),$$

où $(B_t^1)_t, \dots, (B_t^N)_t$ sont des mouvements Browniens réels et indépendants.

Preuve du Théorème 1 II

Propriété "Fortement Feller"

On considère, sur une variété de dimension d , l'EDS :

$$dY_t = \sum_{i=1}^N G_i(Y_t) \circ dB_t^i + G_0(Y_t),$$

où $(B_t^1)_t, \dots, (B_t^N)_t$ sont des mouvements Browniens réels et indépendants.

Posons $\mathcal{A}_{0,M} = \{G_1, \dots, G_N\}$ et définissons récursivement $\mathcal{A}_{k,M}$, $k \geq 1$ par

$$\mathcal{A}_{k,M} = \mathcal{A}_{k-1,M} \cup \{[B, G_j], B \in \mathcal{A}_{k-1,M} \text{ and } j = 0, \dots, N\}.$$

Preuve du Théorème 1 II

Propriété "Fortement Feller"

On considère, sur une variété de dimension d , l'EDS :

$$dY_t = \sum_{i=1}^N G_i(Y_t) \circ dB_t^i + G_0(Y_t),$$

où $(B_t^1), \dots, (B_t^N)$ sont des mouvements Browniens réels et indépendants.

Posons $\mathcal{A}_{0,M} = \{G_1, \dots, G_N\}$ et définissons récursivement $\mathcal{A}_{k,M}$, $k \geq 1$ par

$$\mathcal{A}_{k,M} = \mathcal{A}_{k-1,M} \cup \{[B, G_j], B \in \mathcal{A}_{k-1,M} \text{ and } j = 0, \dots, N\}.$$

Pour un point y de la variété, on définit

$$\mathcal{A}_{k,M}(y) = \text{span}\{V(y), V \in \mathcal{A}_{k,M}\}$$

Preuve du Théorème 1 III

Propriété "Fortement Feller"

Définition

On dit que la condition de Hörmander est satisfaite ssi

$\mathcal{A}_{\infty, M}(y) = \cup_{k \geq 0} \mathcal{A}_{k, M}(y)$ est de dimension d pour tout y .

Preuve du Théorème 1 III

Propriété "Fortement Feller"

Définition

On dit que la condition de Hörmander est satisfaite ssi

$\mathcal{A}_{\infty, M}(y) = \cup_{k \geq 0} \mathcal{A}_{k, M}(y)$ est de dimension d pour tout y .

Proposition

Le système (3) satisfait la condition de Hörmander.

Preuve du Théorème 1 III

Propriété "Fortement Feller"

Définition

On dit que la condition de Hörmander est satisfaite ssi

$\mathcal{A}_{\infty, M}(y) = \cup_{k \geq 0} \mathcal{A}_{k, M}(y)$ est de dimension d pour tout y .

Proposition

Le système (3) satisfait la condition de Hörmander.

Preuve : On a

$$G_1(x, u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } G_0(x, u, v) = \begin{bmatrix} a(\sin(x)u - \cos(x)v) \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix} .$$

Preuve du Théorème 1 III

Propriété "Fortement Feller"

Définition

On dit que la condition de Hörmander est satisfaite ssi $\mathcal{A}_{\infty, M}(y) = \cup_{k \geq 0} \mathcal{A}_{k, M}(y)$ est de dimension d pour tout y .

Proposition

Le système (3) satisfait la condition de Hörmander.

Preuve : On a

$$G_1(x, u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } G_0(x, u, v) = \begin{bmatrix} a(\sin(x)u - \cos(x)v) \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{bmatrix}.$$

Il est facile de calculer que $[G_0, G_1](x, u, v) = \partial_x G_1(x, u, v)$. Ainsi $G_0, [G_0, G_1]$ et $[G_0, [G_0, G_1]]$ engendrent un espace vectoriel de dimension 3 en tout point. ■

Preuve du Théorème 1 IV

Existence de la probabilité invariante

Le générateur infinitésimal est

$$L\phi = \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi + (a(\sin(x)u - \cos(x)v))\partial_x\phi + \cos(x)\partial_u\phi + \sin(x)\partial_v\phi.$$

Preuve du Théorème 1 IV

Existence de la probabilité invariante

Le générateur infinitésimal est

$$L\phi = \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi + (a(\sin(x)u - \cos(x)v))\partial_x\phi + \cos(x)\partial_u\phi + \sin(x)\partial_v\phi.$$

Son adjoint dans dans $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2, dxdu dv)$ est

$$\begin{aligned} L^*\phi &= \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi - (\cos(x)\partial_u\phi + \sin(x)\partial_v\phi) \\ &\quad - (a(u \sin(x) - v \cos(x)))\partial_x\phi - (a(u \cos(x) + v \sin(x)))\phi. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème 1 IV

Existence de la probabilité invariante

Le générateur infinitésimal est

$$L\phi = \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi + (a(\sin(x)u - \cos(x)v))\partial_x\phi + \cos(x)\partial_u\phi + \sin(x)\partial_v\phi.$$

Son adjoint dans dans $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2, dxdu dv)$ est

$$\begin{aligned} L^*\phi &= \frac{1}{2}\partial_{xx}\phi - (\cos(x)\partial_u\phi + \sin(x)\partial_v\phi) \\ &\quad - (a(u\sin(x) - v\cos(x)))\partial_x\phi - (a(u\cos(x) + v\sin(x)))\phi. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de montrer que $L^*\varphi = 0$, avec $\varphi(x, u, v) = \exp(-\frac{a}{2}(u^2 + v^2))$.

Preuve du Théorème 1 V

Unicité de la probabilité invariante

Une probabilité invariante ν d'un processus *fortement Feller* dont l'espace d'état est connexe est ergodique ssi son support est connexe.

Preuve du Théorème 1 V

Unicité de la probabilité invariante

Une probabilité invariante ν d'un processus *fortement Feller* dont l'espace d'état est connexe est ergodique ssi son support est connexe.

Ici μ est à support total.

Preuve du Théorème 1 V

Unicité de la probabilité invariante

Une probabilité invariante ν d'un processus *fortement Feller* dont l'espace d'état est connexe est ergodique ssi son support est connexe.

Ici μ est à support total.

En utilisant le fait que deux probabilités ergodiques distinctes sont mutuellement singulière permet de conclure.

Schéma de preuve du Théorème 1 |

Nous avons que

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - \mu(u_t)\|_{L^2(\mu)}^2 = 2(Lu(t), u(t))_{L^2(\mu)} = - \int |\partial_x u(y)|^2 \mu(dy)$$

où $u(0)$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Schéma de preuve du Théorème 1 |

Nous avons que

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - \mu(u_t)\|_{L^2(\mu)}^2 = 2(Lu(t), u(t))_{L^2(\mu)} = - \int |\partial_x u(y)|^2 \mu(dy)$$

où $u(0)$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Ce n'est pas suffisant pour obtenir notre estimé!!!

Schéma de preuve du Théorème 1 |

Nous avons que

$$\frac{d}{dt} \|u(t) - \mu(u_t)\|_{L^2(\mu)}^2 = 2(Lu(t), u(t))_{L^2(\mu)} = - \int |\partial_x u(y)|^2 \mu(dy)$$

où $u(0)$ est de classe \mathcal{C}^2 .

Ce n'est pas suffisant pour obtenir notre estimé!!!

L'idée est donc de travailler avec un objet équivalent :

Schéma de preuve du Théorème 1 II

Un résultat d'hypoellipticité

Définition

Soit $0 \leq \varepsilon < 1$. La fonctionnelle d'entropie modifiée est définie par

$$H_\varepsilon[f] = \frac{1}{2} \|f\|^2 + \varepsilon (B_0 f, f)_{L^2}, \quad f \in L^2(\mu)$$

Schéma de preuve du Théorème 1 II

Un résultat d'hypoellipticité

Définition

Soit $0 \leq \varepsilon < 1$. La fonctionnelle d'entropie modifiée est définie par

$$H_\varepsilon[f] = \frac{1}{2} \|f\|^2 + \varepsilon (B_0 f, f)_{L^2}, \quad f \in L^2(\mu)$$

Définition

Soit $0 \leq \varepsilon < 1$. La fonctionnelle d'entropie dissipative est définie par

$$D_\varepsilon(g(t)) = -\frac{d}{dt} H_\varepsilon(g(t))$$

pour tout $t \geq 0$.

Schéma de preuve du Théorème 1 III

Un résultat d'hypoellipticité

Si $g(t)$ est solution de $\partial_t g(t) = Lg(t)$ dans L^2 , alors

$$D_\varepsilon(g(t)) = -(Lg, g)_{L^2} - \varepsilon(B_0 Lf, f)_{L^2} - \varepsilon(B_0 f, Lf)_{L^2} \quad (13)$$

Schéma de preuve du Théorème 1 III

Un résultat d'hypoellipticité

Si $g(t)$ est solution de $\partial_t g(t) = Lg(t)$ dans L^2 , alors

$$D_\varepsilon(g(t)) = -(Lg, g)_{L^2} - \varepsilon(B_0 Lf, f)_{L^2} - \varepsilon(B_0 f, Lf)_{L^2} \quad (13)$$

La preuve consiste alors à prouver l'existence de $\alpha > 0$ tel que $D_\varepsilon(g(t)) \geq \alpha H_\varepsilon(g(t))$.

Schéma de preuve du Théorème 1 III

Un résultat d'hypoellipticité

Si $g(t)$ est solution de $\partial_t g(t) = Lg(t)$ dans L^2 , alors

$$D_\varepsilon(g(t)) = -(Lg, g)_{L^2} - \varepsilon(B_0 Lf, f)_{L^2} - \varepsilon(B_0 f, Lf)_{L^2} \quad (13)$$

La preuve consiste alors à prouver l'existence de $\alpha > 0$ tel que $D_\varepsilon(g(t)) \geq \alpha H_\varepsilon(g(t))$. L'exemple qu'on considère entre directement dans le cadre de l'article

“Exponential rate of convergence to equilibrium for a model describing fiber lay-down processes”, de J.Dolbeault, A.Klar, C.Mouhot et C.Schmeiser (2013).

MERCI DE VOTRE ATTENTION